absolue sur $[0;+\infty[$ pour $t=1$ donc à l'instant $t=1$ seconde la balle atteint la hauteur L.

$L=(6-2\ln 2)$ m. .Or $6-2\ln 2 \approx 4.61$.

La hauteur est de 4 m et 60 cm.

d) la balle retombe au sol si : $h(t)=0$

Donc si : $-5t^2+11t-2\ln(1+t)=0,\quad t\geq 1$

En utilisant une calculatrice :
On a :

$h(2)\approx -0,197$
$h(1,98)\approx -0,005$
$h(1,97)\approx 0,088$

$h(1,97)\times h(1.98)\leq 0$ donc $h(t)=0$ pour un réel $t\in]1.97;1.98[$ (théorème des valeurs intermédiaires
La balle retombe a) u sol après 1seconde et 97 au deuxième. C'est-à-dire à peut après 2 Secondes.

Exercice 21

$x\in\mathbb{R}\quad U(x)=\sqrt{x^2+1}+x\ ,\ V(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

On sait que : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

1) a) $U(x).V(x)=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
$=\sqrt{x^2+1}^2-x^2$
$=x^2+1-x^2=1$

On a : $U(x).V(x)=1\geq 0$
Donc U et V ont même signe.

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $1+x^2\geq x^2$
Donc $\sqrt{1+x^2}\geq\sqrt{x^2}=|x|$
-- Or si $x\geq 0$ on a : $|x|=x$
Et par suite $\sqrt{1+x^2}\geq x$
Ce qui donne $\sqrt{1+x^2}-x\geq 0$
D'où $V(x)\geq 0$ et comme U et V ont même signe on aura $U(x)\geq 0$

-- Si $x\leq 0$: $\sqrt{1+x^2}\geq -x$
Donc $\sqrt{1+x^2}+x\geq 0$

D'où $U(x)\geq 0$ et par suite $V(x)\geq 0$
Car U et V ont même signe.

Conclusion
$\forall x\in\mathbb{R}$: $U(x)\geq 0$ et $V(x)\geq 0$.

2) a)
$U'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+1$
$=\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$

$(\sqrt{f})'=\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$: $U'(x)=\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{U(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow\dfrac{U'(x)}{U(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Et par suite : $f(x)=\dfrac{U'(x)}{U(x)}.$

D'où $F(x)=\ln(|U(x)|)+k,\quad x\in\mathbb{R}$
$=\ln(U(x))+k$ (Car: U(x) > 0)

Or $F(0)=0\Rightarrow\ln(U(0))+k=0$
$\Rightarrow\ln(1)+k=0\Rightarrow k=0$

Donc : $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

3) a) $x\in\mathbb{R}^*,\ -x\in\mathbb{R}^*$

$F(x)+F(-x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$
$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$
$=\ln\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\times\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right]$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn